n 次魔方陣の重心

杉崎 行優

概要

本記事では、n 次魔方陣の重心を定義し、その値が各 n において一定となることを示す。

1　n 次方陣と n 次魔方陣

n を任意の整数とする。

縦 n 個、横 n 個のマスに 1 から n^2 の数が 1 つずつ入れられているものを n 次方陣と定義する。n 次方陣の各マス中の数字を図 1 のように定義する。

$m_{(1,1)}$	$m_{(1,2)}$	$\cdots$	$m_{(1,n)}$
$m_{(2,1)}$	$m_{(2,2)}$	$\cdots$	$m_{(2,n)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$m_{(n,1)}$	$m_{(n,2)}$	$\cdots$	$m_{(n,n)}$

図 1　n 次方陣における各マス中の数字

また、n 次方陣のうち、縦の n 列、横の n 列、斜めの 2 列それぞれの合計が全て等しくなるものを n 次魔方陣と定義する。1 列の合計 L は式 1 によって表される。

$$L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n^2} i \tag{1}$$

2　n 次魔方陣の重心

横方向の重心を g_x、縦方向の重心を g_y とすると、g_x と g_y の値はそれぞれ式 2、式 3 によって表される。よって、n 次魔方陣の重心が各 n において一定となることが示された。

$$g_x = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{(i,j)} \cdot i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{(i,j)}} = \frac{L \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i}{n \cdot L} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \frac{1}{2}(n+1) \tag{2}$$

$$g_y = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{(i,j)} \cdot j}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{(i,j)}} = \frac{L \cdot \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j}{n \cdot L} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} = \frac{1}{2}(n+1) \tag{3}$$